ALMINDELIG METHODE

FOR

DIFFERENTIALÆQVATIONERNES

INTEGRATION

VED

HENRIK GERNER SCHMIDTEN.

De Methoder, der anvendes til Differentialæqvationernes Integration, gaae fornemmeligen ud paa, at fremstille den implicite Function under en explicit Form, og ikkun i yderst faa og specielle Tilfælde formaae de at evaluere den, eller at angive dens Værdi i Tal.

Det synes endog umuligt, hertil at finde nogen almindelig Methode, da derimod Manglen paa en saadan, til at oplöse Opgavens förste Deel, er en Fölge af de tilfældige Indskrænkninger, hvorunder disse Undersögelser sædvanligen fremstilles. Saaledes har man fornemmeligen bestræbt sig for at integrere Æqvationerne under endelig Form, det er, at henföre den ubekjendte Function til de faa, der alt ere indförte i det mathematiske Sprog; og i de Tilfælde, hvor dette ikke er muligt, har man indskrænket sig til specielle Former af uendelige Rækker.

Den Methode, der i denne Afhandling udvikles, omfatter alle mulige Differentialæqvationer, og leder i specielle Tilfælde til de faa Integraler, der ere bekjendte. At den er utilstrækkelig til Functionernes Evaluation er en Ufuldkommenhed, den deler med næsten alle nogenlunde almindelige Formler, som f. Ex. den Lagrangiske Reversionsformel.

Da det almindelige Princip, der ligger til Grund for disse Undersögelser, er simpelt, og uden Vanskelighed anvendes i alle forekommende Tilfælde, oplyses det blot ved nogle faa Exempler, der ere tagne iblandt de forskjellige Slags Æqvationer.

Almindeligt Princip for Differentialæqvationernes Integration.

En hvilkensomhelst Differentialæqvation mellem 2 Variable x og y indeholdes i fölgende Form:

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \ldots\frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

og den vil ansees som integrert, naar man har fundet en anden af Formen:

$$f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \ldots\frac{d^{n-1} y}{dy^{n-1}}\right) = c,$$

hvor c er en vilkaarlig Constant; men dette er ikke muligt uden i enkelte Tilfælde. Ikke destomindre kan man altid paa mange Maader dele den givne Æqvation i tvende Dele, saaledes at den ene, der indeholder den höieste Differentialcoefficient af y, ved Hjelp af bekjendte Functioner kan integreres. Man vil da altid kunne finde en Æqvation af Formen:

$$f'_1\left(x,\ y,\ \ldots\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) = \varphi\left(x,\ y,\ \ldots\frac{d^n y}{dx^n}\right),$$

hvor f_1 og φ ere Functionstegn og f'_1 betyder den deriverede Function af f_1.

Heraf dannes ved Integration:

$$f_1\left(x, y, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = c_1 + \int \varphi\left(x, y, \ldots \frac{d^n y}{dx^n}\right)dx,$$

hvor c_1 er en vilkaarlig Constant.

Antages den anden Side af denne Æqvation som en bekjendt Function af x, kan man paa samme Maade som ovenfor danne en Æqvation, hvis ene Side er integrabel, og hvis anden Side indeholder x, y og dennes n Differentialcoefficienter. Efter Integrationen vil man da erholde en Function af x, y og dennes n-2 Differentialcoeffienter, der er lig en anden Function af x, y og dennes n Differentialcoefficienter, under tvende Integraltegn med dertil hörende Constanter.

Fortsætter man disse Operationer n Gange, vil man erholde en Æqvation:

$$f_n(x, y) = \Psi(y),$$

hvor den förste Side ikke indeholder nogen Differentialcoefficient af y, men den anden indeholder dem alle indtil den n^te^ inclusive og n Integraltegn med ligesaamange Constanter.

Antages ved Reversion,

$$y = P(x, \Psi(y)),$$

hvor P er et Functionstegn, vil man ved fortsat Substitution erholde:

$$y = P(x, \Psi(P(x, \Psi(x, \ldots P(x, \Psi(y))\ldots))))$$

og, hvis man fortsatte Substitutionen i det Uendelige, vilde y paa den ene Side ganske forsvinde. Saaledes haves det fuldstændige Integral af den givne Æqvation.

Denne almindelige Methode omfatter alle Differentialæqvationer mellem 2 Variable, og udstrækkes uden Vanskelighed til flere, ja endog til Differenzæqvationerne; men for at oplyse det Princip hvorpaa den beroer, og som alt her findes under en meget almindelig Form, vil det være hensigtsmæssigt at undersöge nogle besynderlige Tilfælde, ved hvilke Integrationen ofte betydeligen simplificeres.

Om Integrationen af de lineaire Æqvationer.

Den almindelige Form for disse Æqvationer er:

$$P\frac{d^n y}{dx^n} + Q\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + Sy = T.$$

For at integrere denne, synes det simplest, at henföre den til et Differential af en Æqvation af lavere Orden. Men da en saadan, i störste Almindelighed, ikke indeholder meer end n ubestemte Coefficienter, sees at disse ikke ville være istand til at bestemme alle dem, der indeholdes i den givne Æqvation, og at man altsaa i denne maa lade idetmindste eet Led være ubestemt.

Paa denne Maade vil man let erholde en Æqvation af Formen:

$$\frac{d.}{dx}\left(P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Q_1\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots\ S_1 y\right) = T_1 + Vy,$$

hvor P_1, Q_1, S_1, T_1, V &c. ere Functioner af x, der afhænge af P, Q, S &c., og efter Integrationen vil man have:

$$P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Q_1\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots\ S_1\ y = c_1 + \int T_1\,dx + \int Vydx.$$

Hvis man altsaa kan integrere en Æqvation af Ordenen $n-1$, vil man kunne udtrykke y som en Function af de tre Led, der staae paa den anden Side, og altsaa ved gjentagen Substitution finde en explicit Form for y, der vil fremstille det fuldstændige Integral af den givne Æqvation.

Saaledes kan man da ansee det almindelige Integral af en lineair Æqvation af *n*te Orden, at staae i transcendent Forhold til det, der svarer til Æqvationen af $n-1$te Orden, idet hiint ikkun ved et uendeligt Antal Operationer kan udledes af dette.

Men deraf fölger ikke, at jo i besynderlige Tilfælde dette Forhold kan fremstilles ved et endeligt Antal Operationer, saaledes som f. Ex. en Sinus, der i visse Tilfælde kan dannes ved nogle Rodextractioner.

Uagtet man efter denne Methode kan henföre enhver Æqvation til en lavere, og saaledes omsider til den af 1ste Orden, hvis Integration altid er let, vil den dog ved de höiere Æqvationer medföre saa mange Vanskeligheder, at det vil være vigtigt at kunne integrere en Æqvation uden at gaae igjennem alle de lavere Ordener.

Dette opnaaes let ved at sætte den givne Æqvation under fölgende Form:

$$(X_n\,(X_{n-1}\,(\ldots\,(X_1\,y)'\ldots)')')' = T + \varphi\,(y)$$

hvor $\varphi(y)$ er en hvilkensomhelst lineair Function af y og dens Differentialcoefficienter, og X_n, X_{n-1} &c. ere Functioner af x, der kunne bestemmes efter Behag, da man ved det ligesaa store Antal af disse, der indeholdes i $\varphi\,(y)$, altid vil kunne fyldestgjöre den givne Æqvation.

Ved at integrere n Gange og dividere successivt med $X_n \ldots X_1$ vil man erholde:

$$y = W + \frac{1}{X_1} \int \frac{1}{X_2} \int \ldots \int \frac{1}{X_n} \int \varphi(y)\, dx^n,$$

hvor W indeholder Functionen T samt n vilkaarlige Constanter; og ved gjentagen Substitution finder man:

$$(A) \ldots y = W + \frac{1}{X_1} \int \ldots \int \frac{1}{X_n} \int \varphi(W)\, dx^n + \frac{1}{X_1} \int \ldots \int \frac{1}{X_n} \int \varphi\left(\frac{1}{X_1} \int \ldots \int \frac{1}{X_n} \int \varphi(W)\right) dx^{2n} + \ldots$$

da W bestaaer af n + 1 Led, vil ogsaa denne Række kunne adskilles i n + 1, hvoraf den ene vil indeholde Functionen T, og hver af de andre en vilkaarlig Constant.

Man kunde ogsaa have deelt den givne Æqvation saaledes, at dens förste Side ikke indeholdt den höieste Differentialcoefficient, og i saa Tilfælde kunde de gjentagne Integrationer ei heller indföre et tilstrækkeligt Antal Constanter, for at Integralet blev fuldstændigt. Paa denne Maade vilde man let danne forskjellige meer eller mindre particulaire Integraler, og ved at sætte Æqvationen under fölgende Form:

$$y = \frac{T}{S} - \frac{1}{S}\left(P \frac{d^n y}{dx^n} + Q \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots\right),$$

vilde man erholde et Integral uden Constanter, og hvis Form vilde være meget simpel, hvis man kunde fremstille den anden Side af denne Æqvation som et fuldkomment Differential.

Antages nemlig:

$$\frac{1}{S}\left(P\frac{d^n y}{dx^n}+Q\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots\right)=(Z_n(Z_{n-1}(\ldots(Z_1y)'\ldots)')')',$$

haves

$$y=\frac{T}{S}-(Z_n(Z_{n-1}\ldots(Z_1y)'\ldots)')'$$

$$(B)\ldots=\frac{T}{S}-(Z_n(Z_{n-1}\ldots(Z_1\frac{T}{S})'\ldots)')'+(Z_n(Z_{n-1}\ldots(Z_1(Z_n(\ldots$$

$$(Z_1\frac{T}{S})'\ldots)')'\ldots)')'-\ldots$$

Valget af de, i de almindelige Integraler (A) og (B) indeholdte Former, saavelsom af de imellem dem liggende meer eller mindre particulaire Integraler, afhænger af den givne Æqvations Natur, og af besynderlige Omstændigheder, hvorfor der ikke kan gives almindelige Regler.

Integration af de lineaire Æqvationer af 1ste og 2den Orden.

Æqvationen af 1ste Orden har den almindelige Form:

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q$$

hvis förste Led let henföres til et fuldkomment Differential, ved at antage:

$$\frac{d.(yX_1)}{dx}=X_1Q,$$

hvor man vil finde $\frac{dX_1}{dx}=PX_1$

Af denne Æqvation, der er lidt simplere end den givne, findes:

$$X_1 = c + \int PX_1\,dx$$

$$= c\left\{1 + \int Pdx + \int P \int Pdx^2 + \ldots\right\}$$

$$\text{og } y = \frac{C}{X_1} + \frac{1}{X_1}\int X_1\,Qdx$$

Functionen X_1 vilde ikke kunne fremstilles under endelig Form, hvis den ikke under et særegent Tegn var indfört i Analysens Sprog, da den som bekjendt er

$$= c\left\{1 + \int Pdx + \frac{(\int Pdx)^2}{1.2} + \ldots\right\} = c\,e^{\int Pdx}$$

og altsaa

$$y = c_1 e^{-\int Pdx} + e^{-\int Pdx}\int e^{\int Pdx}\,Qdx,$$

$$\text{hvor } c_1 \text{ er } = \frac{C}{c}$$

For at integrere Æqvationen af 2den Orden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R$$

kan man vælge fölgende Form:

$$\frac{1}{X_1}\frac{d.}{dx}\left(X_1\frac{dy}{dx}\right) = R - Qy$$

hvoraf man ved Sammenligning med den givne, og ved Integration af en Æqvation af 1ste Orden, finder:

$$X_1 = e^{\int Pdx}$$

og

$$y = a_0 + a_1 \int \frac{dx}{X_1} + \int \frac{1}{X_1} \int X_1 R dx^2 - \int \frac{1}{X_1} \int X_1 Q y dx^2$$

hvor a_0 og a_1 ere vilkaarlige Constanter.

Altsaa er:

$$y = a_0 \left\{ 1 - \int \frac{1}{X_1} \int X_1 Q dx^2 + \int \frac{1}{X_1} \int X_1 Q \int \frac{1}{X_1} \int X_1 Q dx^4 - \ldots \right\}$$

$$+ a_1 \left\{ \int \frac{dx}{X_1} - \int \frac{1}{X_1} \int X_1 Q \int \frac{1}{X_1} dx^3 + \int \frac{1}{X_1} \int X_1 Q \int \frac{1}{X_1} \int X_1 Q \int \frac{1}{X_1} dx^5 - \ldots \right\}$$

$$+ \int \frac{1}{X_1} \int X_1 R dx^2 - \int \frac{1}{X_1} \int X_1 Q \int \frac{1}{X_1} \int X_1 R dx^4 + \ldots$$

Ved at sætte den givne Æqvation under fölgende Form:

$$\frac{1}{X_1} \frac{d^2.}{dx^2} (X_1 y) + X_2 y = R$$

$$\text{hvor } X_1 = e^{\frac{\int P dx}{2}}, \; X_2 = Q - \frac{P^2}{4} - \frac{dP}{2dx},$$

bliver:

$$y = \frac{a_0}{X_1} + \frac{a_1 x}{X_1} + \frac{1}{X_1} \int\int X_1 R dx^2 - \frac{1}{X_1} \int\int X_1 X_2 y dx^2$$

hvorved da let findes den explicite Form af y.

Naar X_2 er $=$ o eller $Q = \frac{P^2}{4} + \frac{dP}{2dx}$,

vil samme henföres til de tre förste Led af den anden Side.

Integration af visse lineaire Æqvationer gjennem alle Ordner.

Hvis man i den almindelige Form, hvorunder vi ovenfor have fremstilt en hvilkensomhelst lineair Æqvation, nemlig:

$$(X_n (X_{n-1} \ldots (X_1 y)' \ldots)')')' = T + \varphi(y)$$

antager φ (y) at være $=$ o og X_n, $X_{n-1} \ldots X$, at være Potenser af Formen:

$$(1+ax)^{m_n}, (1+ax)^{m_{n-1}}, \ldots (1+ax)^{m_1},$$

vil Æqvationen, efter udförte Differentiationer, blive:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{\alpha}{1+ax} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \frac{\beta}{(1+ax)^2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots \frac{\nu y}{(1+ax)^n} = V$$

hvor α, β, ... ν ere Constanter, der afhænge af a, m_n, m_{n-1} &c.

og V er $= T (1+ax)^{-m_n} \ldots (1+ax)^{-m_1}$

Integralet af denne sidste Æqvation findes saaledes som bekjendt:

$$y = A_1 (1+ax)^{-m_1} + A_2 (1+ax)^{-m_1 - m_2 + 1} + \ldots + A_n (1+ax)^{-m^1 - \ldots - m_n + n - 1}$$

$$+(1+ax)^{-m_1}\int(1+ax)^{-m_2}\int..(1+ax)^{-m_n}\int Tdx^n$$

hvor A_1 A_2 .. A_m ere vilkaarlige Constanter.

Ved Hjelp af dette Integral vil man uden Vanskelighed kunne integrere fölgende Æqvation:

$$\frac{d^ny}{dx^n}+\alpha_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots\nu_1 y=V;$$

thi, hvis man antager

$$a=\frac{1}{p},\ m_1=r_1p,\ m_2=r_2p\ \&c.\ \text{og}\ p=\infty,$$

vil denne sidste henföres til Formen:

$$\left(e^{r_nx}\left(e^{r_{n-1}x}\left(\ldots\left(e^{r_1x}y\right)'..\right)'\right)'\right)'=T$$

hvorved findes:

$$y=A_1e^{-r_1x}+A_2e^{-(r_1+r_2)x}+..+e^{-r_1x}\int e^{-r_2x}\int..\int e^{(r_1+r_2+..r_n)x}Vdx^n$$

Det vil nu være let at integrere Æqvationen:

$$(\alpha+\beta(1+ax)^{\gamma})\frac{d^ny}{dx^n}+\ldots\frac{(\alpha_n+\beta_n(1+ax)^{\gamma})y}{(1+ax)^n}=(C_1(1+ax)^{\delta}$$

i det man henförer den til fölgende Form:

$$\left((1+ax)^{m_n}\left((1+ax)^{m_{n-1}}\left(\ldots\left((1+ax)^{m_1}y\right)'..\right)'\right)'\right)'$$

$$= B(1+ax)^{c}\left((1+ax)^{r_n}\left((1+ax)^{r_{n-1}} \ldots \left((1+ax)^{r_1} y\right)' \ldots\right)'\right)'$$

$$+ A(1+ax)^{b}$$

hvor alle de constante Störrelser m_n, m_{n-1}, ... r_n, &c. samt A, B, b, c efter fuldfört Differentiation kunne bestemmes ved Sammenligning med dem, der findes i den givne Æqvation.

Heraf vil man let danne to forskjellige Integraler, eftersom man ved hver Integration dividerer med

$$(1+ax)^{m_n}, \; (1+ax)^{m_{n-1}} \text{ \&c. eller med}$$

$$(1+ax)^{c}, \; (1+ax)^{r_n}, \; (1+ax)^{r_{n-1}}, \text{ \&c.}$$

Paa den förste Maade erholder man:

$$y = \frac{A(1+ax)^{n+b-m_n-m_{n-1}-\ldots-m_1}}{(b+1)(b+2-m_n)(b+3-m_n-m_{n-1})\ldots(b+n-m_n-\ldots m_1)}$$

$$+ \frac{c_1(1+ax)^{n-m_n-m_{n-1}-\ldots-m_1-1}}{(1-m_n)(2-m_n-m_{n-1})\ldots(n-1-m_n-\ldots m_1)}$$

$$+ \frac{c_2(1+ax)^{n-m_{n-1}-\ldots m_1-2}}{(1-m_{n-1})\ldots(n-2-m_{n-1}-\ldots-m_1)} + \ldots + c_n(1+ax)^{-m_1}$$

$$+ B(1+ax)^{-m_1} \int \ldots \int (1+ax)^{-m_{n-1}} \int (1+ax)^{-m_n} \int (1+ax)^{c}$$

$$((1+ax)^{r_n}(\ldots((1+ax)^{r_1} y)' \ldots)')' \, dx^n$$

hvor $c_1\ c_2\ c_3 \ldots c_n$ ere vilkaarlige Constanter.

Man vilde nu ved gjentagen Substitution af y erholde $n + 1$ Rækker, og da alle de Led hvor x fremkommer ere Potenser af $1 + ax$, ville alle Integrationerne med störste Lethed kunne udföres, og alle Rækkerne bestaae af Led, der gaae frem med et stigende Antal af Factorer i Tæller og Nævner.

En lignende Form vil man erholde, hvis man integrerer Æqvationen paa den anden af de to anförte Maader.

Hvis man ikke vilde fortsætte Substitutionen i det Uendelige, men standse ved et vist Led, kunde man, som ved den Taylorske Formel, angive den manglende Deel af Rækken. For at oplyse dette, vil det være nok at betragte et ganske simpelt Exempel:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = cx^n y$$

og altsaa:

$$y = A_1 + A_2 x + c \int\int x^n y \, dx^2$$

$$= A_1 \left\{ 1 + \frac{cx^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \ldots \frac{c^m x^{n+2m}}{(n+1)\ldots(n+2m)} \right\}$$

$$+ A_2 \left\{ x + \frac{cx^{n+3}}{(n+2)(n+3)} + \ldots \frac{c^m x^{n+2m+1}}{(n+2)\ldots(n+2m+1)} \right\}$$

$$+ c^{m+1} \int^{2m+2} x^n y \, dx^{2m+2}$$

Om Integrationen af de ikke lineaire Æqvationer af förste Orden.

Den almindelige Form af dette Slags Æqvationer er:

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y),$$

hvor F (x, y) er en hvilkensomhelst Function af x og y.

Ved Integration findes heraf:

$$y = c + \int F(x, y)\, dx$$

og ved fortsat Substitution:

$$y = c + \int (F(x, c + \int F(x, c + \int F(x, c + \ldots) dx) dx) dx$$

Uagtet man saaledes har den explicite Form for det sögte Integral, vil det ikke være overflödigt at undersöge nogle specielle Tilfælde, hvor denne Form simplificeres.

Den simpleste Form af den givne Æqvation, med Hensyn til y, og naar man ikke vil betragte de lineaire, er:

$$\frac{dy}{dx} = p + qy + ry^2,$$

hvor p, q, r ere hvilkesomhelst Functioner af x.

Denne henföres let til Formen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\alpha}{dx} + (\beta + \gamma y)^2,$$

hvor α, β og γ bestemmes ved fölgende Æqvationer:

$$\gamma = r^{\frac{1}{2}},\ \beta = \frac{q}{2\gamma},\ \frac{d\alpha}{dx} = p - \beta^2$$

saa at α indeholder en vilkaarlig Constant.

Ved i den givne Æqvation at sætte:

$$y = -\frac{dz}{rzdx},$$

erholder man, som bekjendt, fölgende Transformation:

$$\frac{d^2z}{dx^2} - (q + \frac{dr}{rdx}) \cdot \frac{dz}{dx} + rpz = o,$$

der let integreres ved de ovenfor givne Methoder.

Man kunde endnu integrere den givne Æqvation paa mange andre Maader. Saaledes, ved at sætte

$$\log(y - \alpha) = c + \int(\beta + \gamma y)\, dx,$$

erholder man, til at bestemme α, β, γ, fölgende Æqvationer:

$$\frac{d\alpha}{dx} = p + \alpha q + \alpha^2 r, \quad \beta = \alpha r + q \quad \gamma = r,$$

hvoraf vel den förste er lig den givne Æqvation, men udfordrer dog ikkun et particulairt Integral, ligesom i mange andre Tilfælde, hvor Integralregningen ved particulaire Oplösninger lærer at finde de fuldstændige.

Det indsees let, at, hvis p er $= o$, vil det particulaire Integral være $\alpha = o$, og at altsaa det fuldstændige uden Vanskelighed vil kunne findes.

Æqvationen af 3die Grad har den almindelige Form:

$$\frac{dy}{dx} = p + q\,y + r\,y^2 + s\,y^3.$$

Hvis den henföres til fölgende:

$$y = \alpha + \beta \int (\gamma + \delta y)^3\, dx,$$

vil Bestemmelsen af α, β, γ, δ være let.

Ved andre derimod, saasom:

$$y = \beta - \frac{\alpha + \beta}{1 - e^{c + \int (\gamma + \delta y)\, dx}}$$

$$y = \alpha + \beta \tan (c + \int (\gamma + \delta y)\, dx)$$

$$y = \alpha + \frac{\beta}{c + \int (\gamma + \delta y)\, dx}$$

afhænger Bestemmelsen af α, β, γ, δ, af en Æqvation, der har samme Form som den givne, men hvoraf der blot udfordres et particulairt Integral.

Saaledes vil man ved den sidste Form erholde fölgende Udtryk:

$$y = \alpha + \cfrac{\beta}{c + \int dx \left\{ \gamma + \delta\alpha + \cfrac{\delta\beta}{c + \int dx \left\{ \gamma + \delta\alpha + \cfrac{\delta\beta}{c + \int \ldots} \right\}} \right\}}$$

Antages som Exempel:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{a}{x} y + bx^m y^2 + gx^n y^3 = o,$$

vil man finde $\beta = x^{-a}$, $\int \gamma dx = \frac{bx^{m - a + 1}}{m - a + 1}$, $\delta = gx^{n - a}$,

og sættes $\frac{b}{m - n + 1} = e$, bliver

$$y = \cfrac{x^{-a}}{c + ex^{m - a + 1} + \int \cfrac{gx^{n - 2a} dx}{c + ex^{m - a + 1} + \int \cfrac{gx^{n - 2a} dx}{c + \ldots}}}$$

Denne Integrationsmethode vil ogsaa kunne anvendes til at transformere bekjendte Functioner, eller saadanne der, ved at kunne henföres til Qvadraturer, ansees som bekjendte.

Denne Egenskab finder Sted ved fölgende almindelige Classe af Æqvationer:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{X}\right)$$

hvor X er en hvilkensomhelst Function af x. Thi ved Substitution af z for $\frac{y}{X}$, fremkommer:

$$\frac{dX}{X}\,(F\,(z) - z) = dz,$$

og altsaa:

$$\lg X = c + \int \frac{dz}{F\,(z) - z}$$

Er $X = x$, vil den givne Æqvation være homogen, og hvis $X = e^x$, vil den kunne henföres til constante Coefficienter.

Antages en saadan:

$$\frac{dy}{dx} = F\,(y),$$

indsees at F (y) kan deles paa uendelig mange Maader under Formen:

$\varphi\,(y)\, f\,(y)$, og at altsaa Æqvationen:

$$\frac{dy}{f(y)} = \varphi\,(y)\, dx$$

vil kunne integreres paa ligesaamange Maader.

Saaledes vil Æqvationen:

$$\frac{dy}{dx} + ay + by^2 + gy^3 = o,$$

hvis Integral let findes ved logarithmiske eller trigonometriske Functioner, ogsaa have fölgende:

$$y = \cfrac{e^{-ax}}{c - \frac{b}{a} e^{-ax} + g \int \cfrac{e^{-2ax} dx}{c - \frac{b}{a} e^{-ax} + g \int \cfrac{e^{-2ax} dx}{c \,..}}}$$

Sættes Constanten $c = o$, haves et particulairt Integral:

$$y = - \cfrac{a}{b - \cfrac{ga}{b - \cfrac{ga}{b - ..}}}$$

hvilket svarer til den algebraiske Æqvation:

$$a + by + gy^2 = o.$$

Integrationen af

$$\frac{dy}{dx} = e^{ay} y$$

förer saaledes til Reversionen af Formlen:

$$x = \int \frac{e^{-ay} dy}{y},$$

og lignende Undersögelser kunne uden Vanskelighed udstrækkes til Æqvationer af höiere Orden.